



TITLE:

# Small Superfluidity

AUTHOR(S):

五十嵐, 儀孝

---

CITATION:

五十嵐, 儀孝. Small Superfluidity. 物性研究 1971, 16(2): 213-225

ISSUE DATE:

1971-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88259>

RIGHT:

# Small Superfluidity<sup>\*</sup>)

東大理 五十嵐 儀孝

(4月19日受理)

## Abstract

Small- $\text{H}_2^4$  系に対する実験は全くない。本稿では実験可能な droplet に対して簡単な理論でその超流動性について考える。

## § 1 Introduction

Bose 凝集と超流動との関係は一般には、現象論的には、密度行列を用い、超流動状態を記述する  $\Psi$  の定常安定性に、微視的には励起スペクトルの議論をして成立する。その際に無限体系の効果は凝集状態の安定性に現れる。しかし有限系においては凝集状態は fluctuate する。これに対する安定性の問題は多く検討されているが、<sup>1)</sup>  $\text{He} - \text{Bose}^4$  系では気体近似以上の議論は困難であり、現実の液体ヘリウムに対しては何ら予測不可能である。励起エネルギースペクトルに対しての微視的理論はある程度定性的な事は言えるが、安定性の問題は強結合した2つの heatbath の取扱いに定式化されても有限系の効果を容易に取入れる事は出来ない。一方、1, 2次元系における Bose 凝集状態の存在については、Bogoliubov 不等式を用いて、無限系の場合は不可能である事が、<sup>2)</sup> Hohenberg, Fisher 等<sup>2)</sup> によって証明された。しかし有限系に対しては、Bogoliubov 不等式は積極的に凝集状態が存在するとは言っていない。現在ある理論では Bose 凝集について有限系の場合何ら断言出来ない。そこで有限系に対する現象論的取扱をするにも、また Bose 凝集と超流動性の関係をより明らかにする上でも、有限系に対して probe を入れ、超流動性を特徴づける critical parameter と persistency とを、系の粒子数と温度を変化させて測定してみることは意義があると思える。具体的には Quantum droplet を考え、それに固有の励起状態を調べる。簡単なものとして, rot-

---

\* 本稿の一部は3月に物性研で行なわれた研究会で発表したものです。

ational phonon と ripple のスペクトルが出る。これらが超流動性を特徴づけているとして, probe として droplet 内を回転する荷電粒子を考え, critical angular velocity の議論を行う。さらに粒子数と温度を変化させて, 超流動性の実験をすることが現実に可能であることを示す。

## § 2 Quantum droplet

液体ヘリウムは  ${}^4\text{He}$  の多体 bound state であり,  $1\text{He}^4$  atom についての binding energy は,  $\sim 7^\circ\text{K}$  である。

vapor pressure curve は  $P=0$ ,  $T=0$  を通るので, この状態でも  ${}^4\text{He}$  は液体であり, 有限系では表面エネルギー最小のため球状をなす。実験的には  $T$  を変化さすので, それに応じた圧力の  ${}^4\text{He}$  gas と平衡状態にする必要がある。今簡単のため気相を無視する。すると droplet をなす  ${}^4\text{He}$  の多体波動関数は, ある所で急速に damp する。この半径を  $r = \lambda$  とする。我々はこの  $\lambda$  の所に effective な rigid wall があると考えなおすことによって, long range な He 同志の引力ポテンシャルを無視する。そして droplet は, この wall 内を斥力ポテンシャルをもって運動する  ${}^4\text{He}$  system とみなす。これは表面の自由度を無視することになるが, 表面による効果は後で半古典的に取扱い, ripple として現れるので, 当面は上の様な単純な model を考える。なお気相との相互作用も無視するので, 以後の議論は十分低温であるとする。すなわち, droplet の He atom が熱的励起で蒸発する割合は  $\sim e^{-\beta\Delta}$ ,  $\Delta \sim 7^\circ\text{K}$  に比例するので低温では, 蒸発による系への disturbance は無視されよう。なお droplet を実際に形成させる問題については後で述べる。

## § 3 Bose 凝集と Bogoliubov inequality

まず 1, 2dimensional な無限系では Bose 凝集が存在しない事を示めそう。<sup>2)</sup> Bogoliubov ineq.<sup>3)</sup> は,

$$\frac{1}{2} \langle \{A, A^+\} \rangle \geq \frac{k_B T |\langle [A, C] \rangle|^2}{\langle [C^+, [\mathcal{M}, C]] \rangle} \quad (3.1)$$

ここで,  $A$ ,  $C$ ,  $\mathcal{M}$  として次のようにとる。

$$A \equiv a_k = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega dr e^{ik \cdot r} \psi(r) \quad (3.2a)$$

$$C \equiv \int_\Omega dr e^{-ik \cdot r} \psi^+(r) \psi(r) \quad (3.2b)$$

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{ex} = \mathcal{H}_0 - \int_\Omega [\eta \psi^+(r) + \eta^* \psi(r)] dr \quad (3.2c)$$

注意すべきことは、 $k$ は全く任意にえらべること。symmetry breaking fieldを導入しているが、これは系を無限大にする事を予想してのことである。 $\mathcal{H}_0$ はふつうの hamiltonian で、 $\Omega$ の境界の効果はすでに field op. に入っているとする。それでも  $k$ には何ら制限はつかない、 $k$ は  $e^{ik \cdot r}$ がある正規直交系をなせばよい。quasi average を  $\Psi_0$  とする。

$$\Psi_0 = \frac{\langle a_0 \rangle}{V_\Omega^{1/2}} = \frac{1}{V_\Omega} \int dr \langle \psi(r) \rangle \quad (3.3)$$

(3.1) ~ (3.3) より,

$$n_k = \langle a_k^+ a_k \rangle \geq \frac{k_B T |\Psi_0|^2}{(\hbar^2 \rho/m) k^2 + 2|\eta| |\Psi_0|} - \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

これより、 $k=0$ を考えると、

$$2|\eta| (n_0 + \frac{1}{2}) \geq k_B T |\Psi_0| \quad (3.5)$$

有限系の場合は  $n_0$  は finite なので、 $|\eta| \rightarrow 0$  では  $|\Psi_0| \rightarrow 0$  となり、当然ながら  $n_0 > 0$  でも quasi average は存在しない。無限系のときは、(3.4) を  $k$ について和をとる。このとき  $k = 2\pi(\ell_1/L_1, \ell_2/L_2, \ell_3/L_3)$ ,  $\ell_1, \ell_2, \ell_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , として右辺は最も発散する項だけ考えると、

$$\begin{aligned} 1\text{-dim.} \quad \rho L_1 L_2 + \frac{\kappa}{2\pi} &\geq \frac{k_B T |\Psi_0|^2}{2\pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dk_3}{(\hbar^2 \rho/m) k_3^2 + 2|\eta| |\Psi_0|} \quad (3.6a) \\ (L_3 \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\text{-dim.} \quad \rho L_3 + \frac{\kappa}{2\pi} &\geq \frac{k_B T |\Psi_0|^2}{2\pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{k dk}{(\hbar^2 \rho/m) k^2 + 2|\eta| |\Psi_0|} \quad (3.6b) \\ (L_1, L_2, \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

これより, (3.6) の積分はそれぞれ  $\sim \frac{1}{|\eta|}$ ,  $\sim \ln |\eta|$  に比例することになり,  $|\eta| \rightarrow 0$  では右辺は発散する。したがって有限温度では, infinite 1, 2 dimensional system では quasi average は存在しない。3-dim. では  $|\Psi_0| > 0$  である。それでは有限系ではどうであろうか。一見系が有限になれば Bose 凝集はおこりにくくなる様に見られるが, 実はそうでない。有限系では前述の様に  $|\Psi_0|$  で Bose 凝集を議論するのは無意味であり, 確かな定義は与えにくい, 一応  $n_0/N \sim 0.1$  と考えることにすれば, Bogoliubov ineq. より,<sup>4)</sup>

$$N(1+r_s k_c^s) \geq \frac{m k_B T}{N \hbar^2} \frac{n_0}{N} \sum_{k_{0i}}^{k_c} \frac{1}{k^2}, \quad (s; \text{dim.}) \quad (3.7)$$

ここでは,  $A \equiv a_0 a_k^+$ ,  $C \equiv \rho_k = \sum_q a_q^+ a_{q+k}$  とした。  $k_c$  は cut off,  $k_{0i} = \frac{2\pi}{L_i}$ ,  $r_s$  は定数である。  $L_i < \infty$  ならば,  $n_0/N$  は有限値を有する。例えば 3 次元の場合は,

$$(1+r_s k_c^3) \geq \frac{n_0}{N} \frac{m K_B T}{n_3 \hbar^2} \frac{(k_c - k_0)}{2\pi^2} \quad (3.8)$$

であり,  $k_c \sim 10 \text{ \AA}^{-1}$ ,  $k_c \gg k_0$  であれば,  $\frac{n_0}{N} = \frac{1}{10}$  として,  $T < 10^2 \text{ }^\circ\text{K}$  で

compatible である。しかし (3.8) で  $n_0 = 0$  としても成立するので, 必ず Bose 凝集が存在すると確信することは, Bogoliubov ineq. よりはできない。さらに重要なことは有限系の場合, 何によって Bose 凝集を特徴づけるかが問題となる。例えば  $k=0$  (uniform state) の状態に凝集するとすれば Single Particle state の状態  $\sin \frac{n\pi x_i}{L_i}$  は odd の  $n$  に対して凝集状態となる。この様に一般に有限系の場合は, 凝集状態は単純な single particle index では表わせないようである。Hartree 近似の最低状態がもっとも近いであろう。あるいは, most uniform state と言ってもよいであろう。しかしこの状態が解ったとしても, それより高い状態が単純に求まらないので理論的な見通しは悪い。けれど, Onsager<sup>5)</sup> によれば  $k=0$  の状態に凝集がなければ, 他の状態にもないことは解っ

ている。この問題については、ここではこれ以上立入らないことにする。ところで、有限系でも Bose 凝集が起りうる物理的な説明は次の様にして与えられる。有限系では、前述の様に、Hartree 近似の最低状態に Bose 凝集が起ると考える。今、この系の elementary excitation を考えると、やはり、standing wave 的な phonon であろう。しかしこのエネルギーは当然ある、gap を有するはずで、励起して凝集状態をこわす程度の population を得るには系は bulk 系より高温であることが要求される。この様な理由で、 $T_c^b < T_c^f$  が言えよう。しかしこれは凝集状態を static に考えたもので、実際は有限系であることによる凝集状態自身の fluctuate を考える必要があり簡単ではない。無限系の場合に、1, 2 次元的系に Bose 凝集がないことは gap がなくなることと、phonon state density が、 $\epsilon \approx 0$  で、 $D(\epsilon)d\epsilon = \text{const.}d\epsilon$  (1dim),  $\epsilon d\epsilon$  (2dim) であり、 $\epsilon^2 d\epsilon$  (3dim) にくらべて大きいことが効くからである。最後に我々が考える droplet に対しては、

$$A \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{\chi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi)} \psi(r) \sum_{s=0} A(k_0^s) \frac{\sqrt{2\lambda^3}}{k_0^s \lambda} j_0(k_0^s r) d\Omega$$

$$C \equiv \int_{\Omega} \chi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) \psi^+(r, \theta, \varphi) \psi(r, \theta, \varphi) d\Omega \quad (3.9)$$

とし、 $\lambda = 10^3 \text{ \AA}$ , 凝集状態を仮定し、 $\Psi_u \equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi\lambda^3}}$ ,  $|\Psi_u|^2 = \frac{1}{10} N$  とすれば、 $T \leq 10^5$  で consistent になる。しかし我々は  $T_c \approx 1$  を知っているので、これは何も言っていない。droplet の場合は不等式を上手に用いることは、geometrical な理由でむずかしい。なお notation については次の § 4 を参照のこと。

#### § 4 Elementary Excitation

$^4\text{He}$  atom を  $r=\lambda$  で rigid wall がある有限領域内での自由な運動より相互作用によってわずかにずれた運動状態にあるものとする。当然気体近似であつかう。さらに前述の理由により、凝集状態は  $\ell=0$ ,  $m=0$ ,  $s=0$ , であるとする。有限系の場合は depletion effect により、この自由粒子の最低状態を凝集状態とする事はかなりの修正を受ける。これが有限系を取扱う

上で一番困難な点である。これの効果は後で述べる。今 field op. を wall 内で自由運動をする 1 粒子状態の wave function  $\chi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) = A(k_\ell^s) \times j_\ell(k_\ell^s r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  で展開しよう。

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{k\ell m} a(k, \ell, m) \chi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) \quad (4.1)$$

$$A(k_\ell^s) \equiv \frac{2}{\lambda J_{\ell+3/2}(k_\ell^s \lambda)} \sqrt{\frac{k_\ell^s}{\pi}} = \frac{1}{j_{\ell+1}(k_\ell^s \lambda)} \sqrt{\frac{2}{\lambda^3}} \quad (4.2)$$

$$J_{\ell+1/2}(k_\ell^s \lambda) = 0, \quad k_\ell^0 > k_\ell^1 > k_\ell^2 > \dots \quad (4.3)$$

$$[a(k, \ell, m), a^\dagger(k', \ell', m')] = \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (4.4)$$

Hamiltonian は相互作用を  $\delta$  函数にとって,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{k\ell m} \frac{(\hbar k_\ell^s)^2}{2m} a^\dagger(k, \ell, m) a(k, \ell, m) \\ & + \frac{V_0}{2} \sum_{\kappa \kappa'} a^\dagger(k' \ell' m') a^\dagger(p' q' r') a(p, q, r) a(k, \ell, m) \nu_{\pi\pi'}^{\kappa\kappa'} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\nu_{\pi\pi'}^{\kappa\kappa'} = \int_{\Omega} \chi_{\kappa}^*(r, \theta, \varphi) \chi_{\kappa}(r, \theta, \varphi) \chi_{\pi'}^*(r, \theta, \varphi) \chi_{\pi}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \quad (4.6)$$

$$\kappa \equiv (k, \ell, m), \quad \pi \equiv (p, q, r)$$

Bose 凝集により, 十分な低温では,

$$N = \sum_{k\ell m} a^\dagger(k, \ell, m) a(k, \ell, m) = N_0 (s=\ell=0) + \sum_{\kappa} N_{\kappa} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{(\hbar K_0)^2}{2m} N_0 + \sum_{\kappa} \frac{(\hbar k_\ell^s)^2}{2m} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + \frac{V_0}{2} N_0^2 \nu_{00}^{00} \\ & + \frac{1}{2} V_0 N_0 \sum_{\kappa\pi} \nu_{\kappa\pi}^{00} \{ \delta_{\ell, q} \delta_{m, -r} (-1)^m (a_{\kappa}^{\dagger} a_{\pi}^{\dagger} + a_{\kappa} a_{\pi}) \\ & + 4 \delta_{\ell, q} \delta_{m, r} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\pi} \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bogoliubov の Hamiltonian と違う所は radial quantum index について対角的でない。これは有限系では repulsive な相互作用によって、凝集状態が有限の変形を受けるからであり、本当は、 $\ell = m = s = 0$  の状態よりずれた状態に凝集する。物理的には確かに、 $\frac{\sin k_0 r}{r}$  の状態よりも、

$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta(r-\lambda)} + 1}$  の様な状態の方がより凝集状態として可能性がある。しかし

前述のように正規完全直交函数系を見出すのは analytic に困難であり、もしもそれを用いても、エネルギー Spektrum を定性的にまで変化させるとは、 $V_0$  が小さい場合はありえない。ただ、凝集状態の安定性の議論では、この事が重要な問題となろう。もしも、 $\nu_{\kappa\pi}^{00} = v_{\kappa} \cdot v_{\pi}$  の様に separable ならば、meson pair theory<sup>6)</sup>, polaron theory<sup>7)</sup> において取扱われており、singular integral eq. により対角化が analytic に行なわれている。この事は technical なので本稿では略す。ただ定性的な depletion の効果はあとで述べる。 $\mathcal{H}$  を (4.7) を用い書きかえ、さらに radial q.n. について対角的なものを残すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{(\hbar k_0)^2}{2m} N + \frac{1}{2} V_0 N^2 \nu_{00}^{00} \\ & + \sum'_{\kappa} \left\{ \left[ \frac{(\hbar k_{\ell}^s)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_0)^2}{2m} \right] + V_0 N [2\nu_{\kappa\kappa}^D - \nu_{00}^{00}] \right\} a_{\kappa}^+ a_{\kappa} \\ & + \sum'_{\kappa} \frac{1}{2} V_0 N \nu_{\kappa\kappa}^D (-1)^m (a_{\kappa}^+ a_{-\kappa}^+ + a_{\kappa} a_{-\kappa}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \nu_{\kappa\pi}^D & \equiv \frac{1}{4\pi} A(k_0)^2 \delta_{\kappa,p}, \quad a_{-\kappa}^+ \equiv a^+(k_{\ell}^s, \ell, -m) \\ \nu_{00}^{00} & = \frac{A(k_0)^4}{4\pi k_0^3} (S_i(2\pi) - S_i(4\pi)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Bogoliubov tr. によって (4.9) を対角化すれば、

$$\mathcal{H} = E_0 + \sum'_{\kappa} E_{\kappa} (A_{\kappa}^+ A_{\kappa} + A_{-\kappa}^+ A_{-\kappa}) \quad (4.11)$$



$$E_{\kappa} = \sqrt{\left\{ \left[ \frac{(\hbar k_{\ell}^s)^2}{2m} - \frac{(\hbar k_0)^2}{2m} \right] + V_0 N [2\gamma_{\kappa\kappa}^D - \gamma_{00}^{00}] \right\}^2 - (V_0 N \gamma_{\kappa\kappa}^D)^2} \quad (4.12)$$

$$[A_{\kappa}, A_{\kappa}^+] = 1, \quad [A_{\kappa}, A_{\kappa}] = 0, \quad [A_{\kappa}, A_{-\kappa}^+] = 0 \quad (4.13)$$

$E_{\kappa}$  は  $m$  について当然 degenerate している。このスペクトルは実は本質的に, phonon type ではない。無限系では  $k \rightarrow 0$  で phonon が現われたが, 有限系では量子数が離散的であり, この様な limit は出来ない。しかし  $\lambda \rightarrow \infty$  とすれば,  $\gamma_{\kappa\kappa}^D \rightarrow \gamma_{00}^{00}$  で,  $k_0 \rightarrow 0$  なので  $E_{\kappa} \propto \text{const. } \ell$  の様に  $\ell$  が小さい所で, linear になり, rotational phonon のスペクトルとなる。しかし我々の近似が十分でないからであり, 物理的にはやはり low lying spectrum は phonon と考えられよう。無論系の大きさにもよる。 $\gamma_{\kappa\pi}$  の off diagonal の効果は, separable と仮定すれば, 今得られたスペクトルを drastic にはこわさず, 新しい radial q.n. を  $s'$  とすれば,  $E_{\ell, s} < E_{\ell, s'} < E_{\ell, s+1}$  の様に古いレベルの間におさまる。 $\ell$  の小さい所では今の所  $E_{\ell 0} \sim \ell^2$  程度以上の事は言えない。 $\ell \gg 1$  では,  $k_{\ell 0} \approx \ell + 1.85 \ell^{1/2}$  でやはり  $E_{\ell 0} \sim \ell^2$  である。もっと詳しい事は computer により, 前述の singular int. eq. を  $\gamma_{\kappa\pi} \approx v_{\kappa} \cdot v_{\pi}$  の近似をして解かねばなるまい。

今まで表面の自由度を無視して来たが, この自由度のみによるスペクトルは, capillary wave として現われ, 次のようになる。半古典的に求める。

$$\epsilon_{\ell} = \hbar \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \lambda^3} \ell(\ell-1)(\ell+2)} = c \sqrt{\ell(\ell-1)(\ell+2)} \quad (4.14)$$

$\gamma$ : surface tension,  $\rho$ : density of mass.

$\lambda = 1000 \text{ \AA}$ ,  $\gamma = 0.5 \text{ dyn cm}^{-1}$ , とすれば  $C = 0.4 \times 10^{-3} \text{ deg.}$  となる。 $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 1.1 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{K}$  でかなり小さい。実際は  $E_{\kappa}$  と  $\epsilon_{\ell}$  は独立ではなく, 2つの mode は radial q.n. を通じて結合しているので,  $\epsilon_{\ell}$  の方は  $E_{\kappa}$  に対する摂動になっている。したがって branch が2つあるのではなく  $E_{\kappa}$  が多少変化する。

以上の他に当然 roton, vortex ring 等があるがこれらは本質的には, bulk の場合と同じと考えられよう。

## § 5 Superfluidity of droplet

今 droplet 内に micro な物体を入れてこれを回転させるとして Landau の criterion を考える。

micro な物体のエネルギーを  $\epsilon$  とすれば  $\epsilon \cong \frac{1}{2}(\lambda\omega)^2 M$ , Angular mom. は  $\omega\lambda^2 M$ . となり, energy, angular mom. 保存則より, もしも dissipate とすれば,

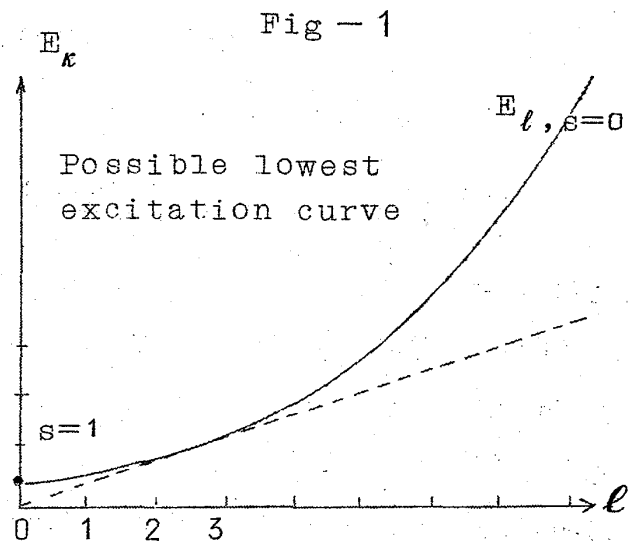
$$\epsilon = \epsilon' + E_\kappa, \quad \vec{\omega}\lambda^2 M = \vec{\omega}'\lambda^2 M + \hbar\vec{\ell} \quad (5.1)$$

したがって critical angular freq. は次式で与えられる。

$$\omega_c = \frac{1}{2\hbar} \frac{\partial E_\kappa}{\partial \ell}, \quad \ell = |\vec{\ell}| \quad (5.2)$$

ただし, その時の  $\ell$  は Fig-1 における接点に近い値をとる。それは  $E_\kappa$  自身に巾があるので (5.1) は満足

されよう。  $\omega_c > 0$  であることは、今の場合,  $\ell = 0$  の所で ground state と,  $s = 1$  の間に energy gap が存在するからである。実際の系ではさらに,  $E_\kappa \propto \ell$  である事が効くのであろう。しかし我々の得た近似内では残念ながら, このふるまいは現われていないのである。



実験にかかる  $\omega_c$  は恐らく bulk と同様に vortex ring であろう。その場合 bulk のエネルギー・スペクトルを用いて,  $\omega_c \approx \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{1}{\lambda} \frac{\epsilon}{p}$  で近似されよう。  $\lambda = 1000 \text{ \AA}$  として, 種々の excitation で  $\omega_c$  がどう変化するかみると,  $T \lesssim 1^\circ \text{K}$  で,

$$\text{phonon} ; \quad \omega_c^p \approx 2.4 \times 10^9 \text{ sec}^{-1}$$

$$\text{roton} : \quad \omega_c^r \approx 0.6 \times 10^9 \text{ sec}^{-1}$$

$$\text{vortex ring : } \omega_c^v \approx 0.4 \times 10^9 \text{ sec}^{-1} \quad (5.3)$$

のようになる。 $\lambda$ によって droplet では何が  $\omega_c$  を定めるかは明らかではない。この点においても実験に多くを期待せざるを得ない。

## § 6 Motivation for experiments

液体  $\text{He}$  内に例えば  $\text{Po}^{210}$  より放出した  $\text{He}_2^+$  を入れると周囲の  $\text{He}^4$  を polarize して約  $6 \text{ \AA}$  程度の core を形成し，全質量が  $100 M_{\text{He}}$  ぐらいの有効質量をなす。これが droplet 内に入ったと考え，droplet の重力による作用を vertical e.f. でなくす。そして静止させる。その時に最大限何程の質量をささえられるかは，droplet 表面での ion core による表面張力で決まる。

$$\text{core radius} \sim 6.3 \text{ \AA} (\sim 1^\circ \text{K}), \quad r \sim 0.5 \text{ dyn. cm}^{-1}$$

$$\text{maximum weight} \approx 2.0 \times 10^{-7} \text{ dyn}$$

$$\text{maximum He}^4 \text{ number} \approx 3 \times 10^{13} - \text{He}^4 \quad (6.1)$$

例えば  $\lambda = 1000 \text{ \AA}$  では  $N_{\text{He}}^4 = 9.2 \times 10^7$  である。そこでこの様に静止した droplet に対する実験の可能性を考えてみる。

a) Droplet formation 容器の中に saturate vapour を用意する。そこに  $\text{Po}^{210}$  より得られる  $\text{He}_2^+$  を放出しイオンを核として小さい ( $\lambda \sim 10 \text{ \AA}$ ) droplet を形成さす。その時体積一定とするとこれ以上成長しない。次に定温圧縮すると同時に，vertical ele. field を作用させて，予想される大きさに応じて電圧を調整し静止させながら，droplet を大きくする。droplet 同志はクーロンカのために一様に容器に分布する。無論，多少の  $\lambda$  の不均一のために，grid を設けて，ある範囲のものを静止させる必要がある。なお，イオンによる核形成についての理論は 8) を参照されたい。

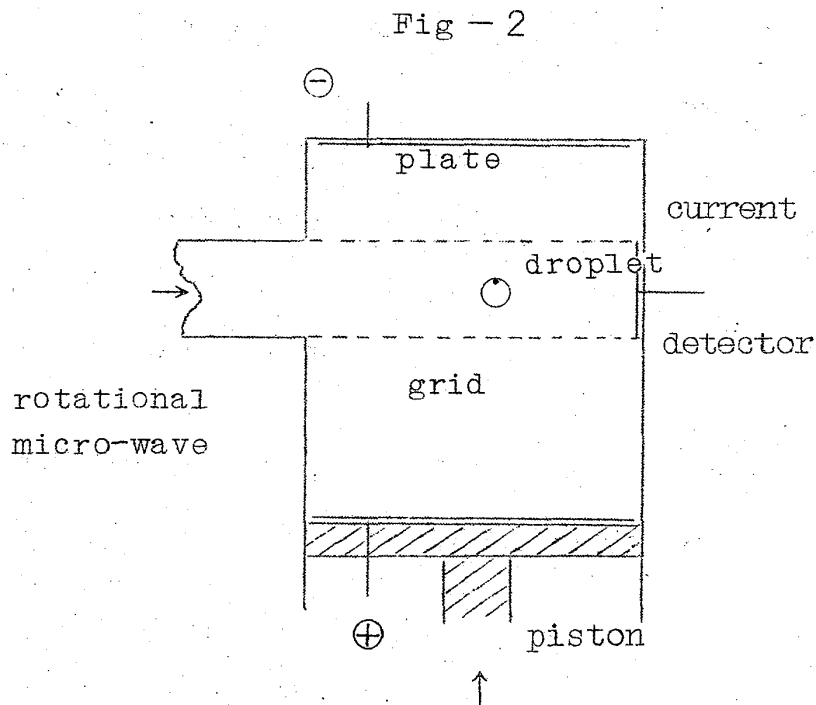
b) Rotation of  $\text{He}_2^+$ -core イオンを droplet 内に回転させるのには，(5.3) のように  $\omega_c$  がちょうどマイクロ波帯にある事を利用して Fig-2 の様に横からマイクロ波を送る。すると  $\text{He}_2^+$ -core は約  $100 M_{\text{He}}^4$  をもって droplet 内を回転する。

## c) Detection of superfluid droplet

ある $\omega$ で回転した場合に、もしも droplet が super (Bose-Cond) ならば、droplet に何らの変化を起さないで、horizontal ele. field をかければ、 $\text{He}_2^+$  による current が検出される。またもしも normal ならば、回転を継続してる間に系の温度が上るなり、または大きな変形を起すなりして、droplet の全質量は減少する。これは、 $\text{He}^4$  の evaporation や変形による、部分的な分離による。そうすれば、重力と、vertical e.f. の均合いがやぶれて、droplet は上方の電極に付着する。そうすれば、horizontal な電場をかけても current は流れない。

d) 以上の実験を、 $\lambda$  (または、 $N_{\text{He}}$ ) と温度を変えて行う。その場合 $\omega$ で回転する場合の継続時間も変えて行なえば、small system に特有な condensate state の life time も得られよう。

以上 small system の超流動性が原理的に実験可能であることが示されたが、実際には技術的な困難が多少あると思われます。しかし現在、こうした small system の実験がない事は、むしろ small system の何処が理論的に興味があり、物理的に重要であるかが本当に明らかでないからかもしれない。



## § 7 Discussion

一般に small system の特徴は shape と size effect であり、Bose 系には、boundary cond. を通じてエネルギースペクトルと、凝集状態の

fluctuation に影響する。いずれも数学的取扱いは困難であり、また凝集状態も単純な一粒子状態ではない。一次元的系では Hartree 近似で解かれてはいる。<sup>9)</sup> 3次元系に対するエネルギースペクトルの box boundary の場合については他の機会に示す。また2, 3の論文で,<sup>1)</sup> 凝集状態の fluctuation による安定性の問題はあつかわれているが、凝集状態が  $k=0$  とされており、有限系による depletion effect が全く考えられてない。さらにもっと困難な、凝集状態とそれ以外の状態との結合を無視し、統計的独立としている事はさらにまずい。これらの問題は超電導の場合とちがい、coherence length が数 Å である事に依っている。または gas 近似では本質的に解決出来ないと言ってもよいであろう。

次に Bose 凝集と超流動との関係であるが、これは完全に解った事ではない。上述の実験で、 $N$  を変化させて実験を行なえば、ある程度この関係が明らかになる。理論的には現象論で進まざるをえないが、それには実験が多いに期待されている。本当は比熱の  $\lambda$  点の近くでのふるまいがわかれば、凝集状態の存在や、quasi long range order の存在について何らかの知識が得られるのであろうが、実験的にはむずかしい。それに dynamical であるので、 $T_\lambda$  に近づいても static な比熱の定義にも問題がある。おわりに、vessel を回転して vortex を形成する dynamical な理論は、2次元的な系での cylindrical phonon の  $\ell=m=1$ ,  $k_z=0$  への凝集として、micro に議論出来るのではないかと考えられるが、他の機会に論ずる。

#### References

- 1) A.G.Glassgold, H.Sauermann ; Phys. Rev., 182, (1969), 262. (further ref. can be found in this)
- 2) P.C.Hohenberg ; Phys. Rev., 158, (1967), 383.  
G.V.Chester, M.E.Fisher, N.D.Mermin ; Phys. Rev., 185, (1969) 760.  
D.Jasnow, M.E.Fisher ; Phys. Rev. Letters, 23, No.6, (1969), 286.
- 3) For instance; D.Ruelle ; Statistical Mechanics (Benjamin, 1969)

- 4) G.V.Chester ; Lectures in Theoretical Physics,  
(Univer. of Colorado Press, 1969)
- 5) O.Penrose, L.Onsager ; Phys. Rev., 104, (1956), 576.
- 6) G.Wentzel ; Helv. Phys. Acta, 15, (1942), 111.  
A.Klein, B.McCormick ; Phys. Rev., 98, (1955), 1428.
- 7) T.D.Lee, D.Pines ; Phys. Rev., 92, (1953), 883.  
E.P.Gross ; "Transformation Theory" in Mathematical  
Methods in Solids State and Superfluid Theory, edited  
by Clark, Derrick (Oliver & Boyd)
- 8) ノントヴィチ ; 熱力学 (みすず書房)
- 9) T.T.Wu ; J.Math. Phys., 2, (1961), 105.